УДК 004.052

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Нефедов М.Ю., соискатель к.т.н.,
Федеральное государственное унитарное предприятие
«Специальное научно-производственное объединение «Элерон»

Аннотация: *в статье представлен алгоритм прогнозирования сингулярной компоненты сигнала на основе автокорреляционной функции стационарного процесса.*

Ключевые слова: *алгоритм, случайный процесс, стационарный процесс, нестационарный процесс, случайная функция, автокорреляционная функция.*

UDC 004.052

FORECASTING OF THE STATIONARY SIGNAL ON THE BASIS OF AUTOCORRELATION FUNCTION

Nefedov M. Yu., applicant,
Federal state unitary enterprise
«Special scientific and production association «Eleron»

Summary: *in article the algorithm of forecasting singulyarny signal components on the basis of autocorrelation function of stationary process is presented.*

Keywords: *algorithm, casual process, stationary process, non-stationary process, stochastic function, autocorrelation function.*

Для расширения возможностей контроля персонала на основе метода фотоплетизмографии (ФПГ) требуется разработка алгоритмов, которые позволили бы контролировать функциональное состояние людей, деятельность которых характеризуется движением. Дело в том, что в ходе движения человека (т.е. ходьбы), на котором расположен датчик сигнала ФПГ, сигнал приобретает нестационарный характер в силу того, что в нем присутствует помеха. При обработке нестационарного процесса достаточно трудно обеспечить определение кардиоинтервалов с требуемой точностью.

Сигнал помехи имеет импульсный характер. В ходе движения формируется последовательность коротких импульсных сигналов, которые накладываются на сигнал ФПГ. При рассмотрении спектров сигнала ФПГ при условии отсутствия и наличия помехи движения видно, что их спектры идентичны. Это вызывает значительные трудности при обработке сигналов на основе фильтрации. Большинство методов фильтрации основано на том, что используются различные фильтры, которые изменяют спектральный состав сигнала. Использование кратковременного анализа, например, на основе оконного преобразования Фурье или вейвлет-преобразования [1] позволяет выявить наиболее значимые по амплитуде импульсы во временной области, однако неизвестны его параметры (длительность, амплитуда, фаза).

Допустим, что сигнал и помеха могут быть разграничены во времени, то есть мы можем определить начало присутствия помехи с заданной вероятностью с учетом ошибок первого и второго рода. Также предположим, что наблюдаемый процесс до появления помехи может быть представлен как случайный, а его параметры описываются тем или иным законом распределения.

Известно [2], что случайный процесс, согласно теореме Уолда, можно разбить на регулярную, чисто вероятностную компоненту, и прогнозируемую сингулярную, состоящую из периодических или квазипериодических функций времени.

Согласно теории случайных функций [3] любую случайную функцию можно представить в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_k a_k u_k(t), \qquad (1)$$

где $X(t)$ – случайная функция;

$m_x(t)$ – математическое ожидание (МО) случайной функции;

a_k – некоррелированные случайные величины, МО которых равны нулю;

$u_k(t)$ – некоторые неслучайные функции.

Иногда функции $u_k(t)$ называют координатными функциями канонического разложения случайной функции (1).

В этом случае автокорреляционную функцию, как корреляционные моменты величин X(t) и X(τ), можно вычислить по следующей формуле

$$K_x(t,\tau) = \sum_k D_k u_k(t) u_k(t+\tau), \tag{2}$$

где $K_x(t,\tau)$ – автокорреляционная функция (АКФ);

D_k – дисперсии случайных величин a_k.

Обозначим правое слагаемое выражения (1) как $X^*(t)$ и зададим произвольную последовательность значений t_n аргумента t и определим случайные величины a_k по формуле

$$a_k = \sum_n a^*_{kn} X^*(t_n), \tag{3}$$

где a^*_{kn} – произвольные коэффициенты (комплексные).

Для двух линейных функций корреляционные моменты случайных величин можно вычислить по формуле

$$M[a_k a_1] = \sum_n \sum_m a^*_{kn} a^*_{lm} K_x(t_n, t_m). \tag{4}$$

Величины a_k и a_1 должны быть некоррелированы, коэффициенты в выражении (4) должны удовлетворять условиям

$$\sum_n \sum_m a^*_{kn} a^*_{lm} K_x(t_n, t_m) = 0 \text{ при } k \neq 1. \tag{5}$$

В этом случае координатные функции можно определить следующим образом

$$u_k(t) = \frac{1}{D_k} \sum_n a^*_{kn} K_x(t, t_n). \tag{6}$$

Для корреляционных моментов случайной величины a_k справедливо выражение

$$M[a_k a_1] = D_1 \sum_n a^*_{kn} u_1(t_n). \tag{7}$$

Согласно формуле (7) можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_n a^*_{kn} u_1(t_n) = 0, k \neq 1 \\ \sum_n a^*_{kn} u_k(t_n) = 1 \end{cases}. \tag{8}$$

На практике, например, если процесс стационарный, возможно приближенно представить случайную функцию U(t) в виде комбинации известных функций со случайными коэффициентами

$$U(t) \approx \sum_{n=1}^{N} A_n V_n(t) \tag{9}$$

где A_n – случайные величины;

$V_n(t)$ – некоторые известные функции.

Согласно теореме Пугачева В.С. [3], в сингулярной компоненте присутствует канонический базис, представленный набором экспонент $e_n(t) = \exp(i\cdot\omega_n\cdot t)$. Тогда представим U(t) в виде N-членного линеала $U(t) = \alpha_1\cdot e_1(t) + \alpha_2\cdot e_2(t) + \ldots + \alpha_N\cdot e_N(t)$ из элементов канонического базиса $a_0\cdot U(t_0) + a_1\cdot U(t_1) + \ldots + a_N\cdot U(t_N) = 0$.

В этом случае для вектора нахождения неизвестных коэффициентов $\vec{a} = \{a_1 \ldots a_N\}$ по участку сигнала до момента появления помехи нужно составить и решить систему алгебраических уравнений. Для отбора информационно содержательных уравнений можно использовать характерные черты АКФ. То есть в расчет включать только те точки, которым принадлежат пиковые значения АКФ.

Представим участок сигнала до появления помехи, вектором амплитудных значений и координатной равномерной временной сеткой, а также для вычисления коэффициентов АКФ имеется совокупность амплитудных значений сдвинутых по временной сетке. При расчете коэффициентов нам потребуется два массива A_x и A_y одинаковой размерности. Коэффициенты корреляции можно вычислить по формуле

$$C(\tau) = \frac{1}{\sqrt{a_x \cdot a_y}} \sum_n A_x(n) \cdot A_y(n+\tau), \tag{10}$$

где $a_x = \sum_n A_x^2(n);$

$a_y = \sum_n A_y^2(n+\tau);$

τ – сдвиг по временной сетке.

После вычисления АКФ нужно найти те ее значения, в которых модуль коэффициента корреляции превосходит некоторое пороговое значение. Таким образом, при выполнении выше оговоренного условия мы получим количество точек (сдвигов) для которых корреляционные связи высоки.

Получив набор значений сдвигов и соответствующих значений, при которых корреляционные связи сильны для различных начальных точек при вычислении АКФ, можно приступить к поиску неизвестных коэффициентов по выражению

$$U_N \cong \sum_k a_k U_{N-M(k)},\ k=1, 2,\ldots,K_{end} \tag{11}$$

где U_N – значение сингулярной компоненты процесса в точке с номером N;

K_{end} – количество слагаемых в сумме;

a_k – неизвестные коэффициенты;

M(k) – вычисленные значения смещений.

Запишем уравнение (11) в матричной форме

$$B \cdot W = P, \tag{12}$$

где $B = \{U_{N-M(k)}\}$;

$P = \{U_N\}$;

$W = \{a_k\}$.

Решение уравнения (12) имеет следующий вид

$$W = B^{-1}P. \tag{13}$$

На рисунке 1 представлена обобщенная блок-схема алгоритма прогнозирования сингулярной компоненты сигнала ФПГ на время воздействия помехи движения типа «ходьба».

Алгоритм предполагает, что известны участки сигнала и помехи, они характеризуются размерностями N_s и N_x. Их совокупность образует целую временную развертку, на которой проводится обработка сигнала, т.е. $N = N_s + N_x$. Для участка размерности N_s вычисляется арифметическое среднее по амплитудным значениям A

$$\overline{A}_s = \frac{1}{N_s}\sum_{i=1}^{N_s} A_i \,. \tag{14}$$

Далее проводится удаление постоянной составляющей на участке N_s по формуле

$$A^* = A - \overline{A}_s \,. \tag{15}$$

Затем задается ряд параметров, которые предназначены для формирования АКФ согласно формуле (10).

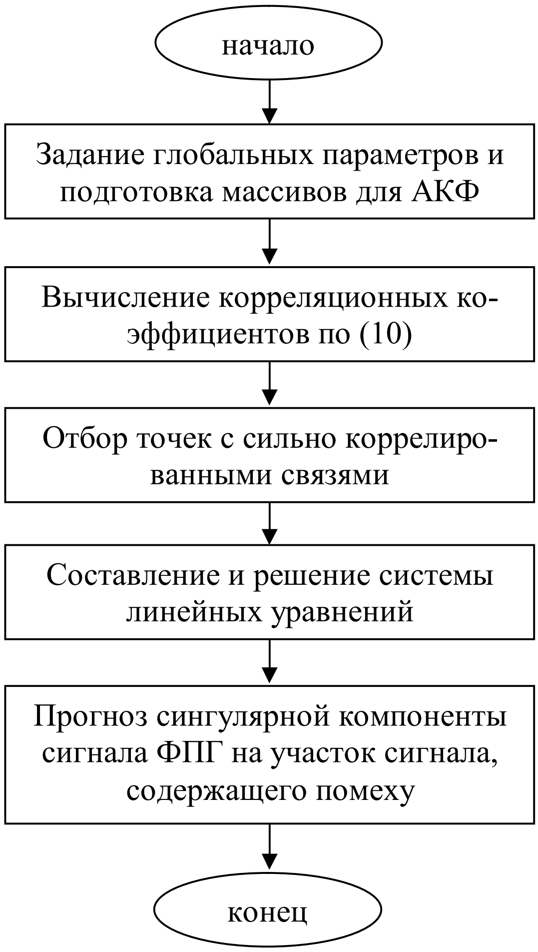


Рис. 1. Блок-схема алгоритма прогнозирования сингулярной компоненты сигнала ФПГ

Исходя из длительности участка сигнала и помехи, возможно, построить k различных АКФ. Как минимум рекомендуется построить две АКФ состоящие из корреляционных коэффициентов, вычисленных по формуле (10).

В ходе вычисления образуется матрица размерности $N_s^* \times N_c$, $N_s^* < N_s$, N_c – число АКФ. Далее проводится отбор точек с сильно коррелированными связями согласно условию

$$(C_{1,m} - C_{2,m})(C_{n+1,m} - C_{n,m}) < 0 \text{ и } \left|C_{n,m}\right| > C_{por}, \tag{16}$$

где C_{por} – пороговое значение коэффициента корреляции.

В итоге формируется матрица, содержащая индексы и значения коэффициентов корреляции. Рекомендуется таким образом выбрать параметры, чтобы число коэффициентов корреляции было небольшим (10-15 значений), так как в дальнейшем они будут участвовать в системе линейных уравнений.

Составление уравнений проводится следующим образом:

1) вектор P, элементы которого формируются из элементов массива A согласно индексам, полученным на этапе выделения точек с сильно коррелированными связями, формируется во внешнем цикле для r-итераций;

2) матрица B формируется аналогично вектору P с учетом сдвига, во внутреннем цикле для k-итераций.

Неизвестные коэффициенты вычисляются по формуле (13) и формируется вектор W.

Далее формируется двойной цикл. Число итераций во внешнем цикле определяется числом отсчетов, содержащих помеху, а внутренний – числом выделенных точек на этапе анализа коэффициентов корреляции.

Прогноз сингулярной компоненты сигнала ФПГ осуществляется на основе следующей формулы

$$Ax(i) = \sum_{j=1}^{N_w} W_j \cdot A_m, \tag{17}$$

где $m = N_s + i - M(i)$;

N_w – размерность вектора W;

$i = 1 \ldots N_x$.

Вычислив все N_x точек, мы получим прогноз поведения сигнала с момента появления помехи в сигнале и до момента ее окончания.

Целью проведения моделирования является качественная оценка прогнозирования стационарного процесса на время воздействия помехи движения типа «ходьба», когда наблюдаемый процесс обретает нестационарный характер. В этом случае неправомерно использовать методы и алгоритмы выделения информационных параметров, которые предполагают стационарность процесса.

В качестве стационарного процесса используем следующую модель сигнала ФПГ (18) на которую наложен шум с определенным значением дисперсии.

$$s(k\Delta t)=s_1(k\Delta t)+s_2(k\Delta t)+s_3(k\Delta t)+s_{fm}(k\Delta t), \tag{18}$$

где $s_1(k\Delta t)=a_1\sin(2\pi\, f_1\, k\Delta t)$ – LF-составляющая процесса;

$s_2(k\Delta t)=a_2\sin(2\pi\, f_2\, k\Delta t)$ – HF-составляющая процесса;

$s_3(k\Delta t)=a_3\sin(2\pi\, f_3\, k\Delta t)$ – VLF-составляющая процесса;

$s_{fm}(k\Delta t)=ka[\cos(2\pi\, f2\, k\Delta t + m\sin(2\pi\, kr_1\, f_1\, k\Delta t))+$

$+\cos(2\pi\, f_2\, k\Delta t + m\sin(2\pi\, kr_2\, f_3\, k\Delta t))]$ – модуляция составляющих.

Параметры модели:

a_1, a_2, a_3 – амплитуды гармонических составляющих сигнала;

f_1, f_2, f_3 – частоты гармонических составляющих сигнала;

ka – амплитудный коэффициент;

kr_1, kr_2 – коэффициенты иррациональности;

m – коэффициент модуляции;

k – номер отсчета;

Δt – шаг дискретизации.

Для моделирования шума был использован генератор случайных чисел распределенных по нормальному закону, реализованный стандартной функцией.

На основе алгоритма (см. рис. 1) была написана программа в среде Matlab и проведено ее тестирование.

В ходе тестирования было выявлено, что качество прогноза определяется двумя параметрами

$$\begin{cases} k = \dfrac{T_с}{T_п} \\ q = 10\lg\left(\dfrac{P_с}{P_ш}\right) \end{cases}, \tag{19}$$

где $T_с$ – длительность участка сигнала ФПГ, не содержащего помеху;

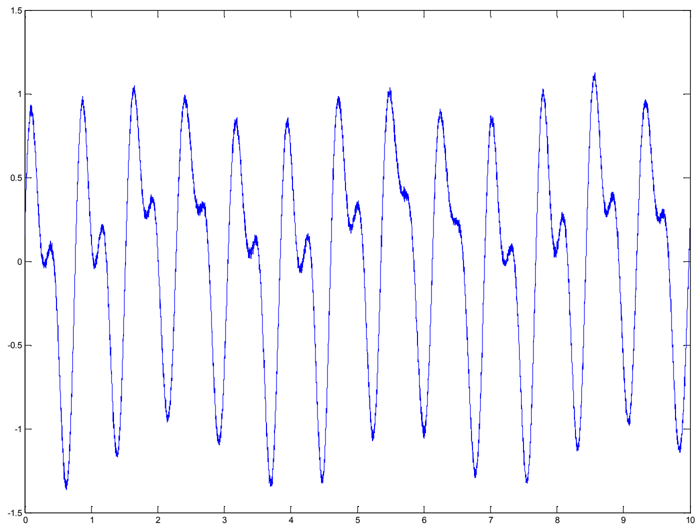
$T_п$ – длительность участка сигнала ФПГ содержащего помеху;

$P_с$ – мощность сигнала при отсутствии шума;

$P_ш$ – мощность шума.

На рисунке 2 показаны примеры прогноза сигнала для различных значений параметра q.

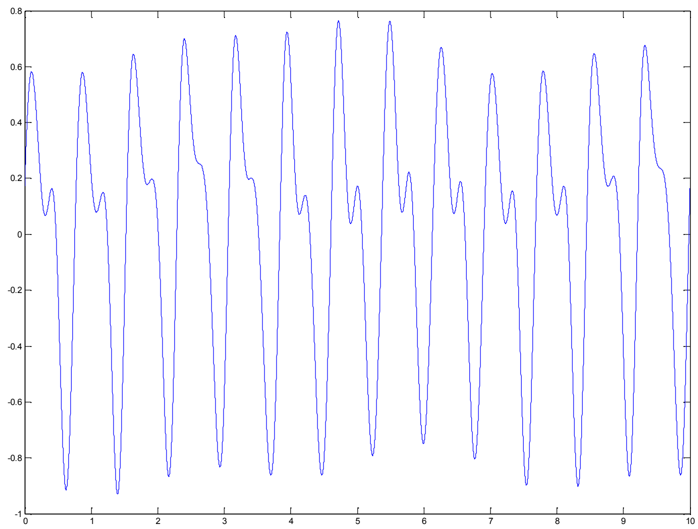
U, *усл. ед.*



t, *с*

к=2, q=40 *дБ*

U, *усл. ед.*



t, *с*

к=2, q=80 *дБ*

Рис. 2. Примеры прогноза сигнала ФПГ
на основе предлагаемого алгоритма

Для правильной работы алгоритма необходимо обеспечить условия: k≥2 (должны быть целыми числами) и q≥40 *дБ*.

При ходьбе в сигнале ФПГ появляется помеха, наблюдаемый процесс становится нестационарным и согласно требованиям [4] невозможно достоверно выделить информационные параметры. Большинство методов и алгоритмов снижения влияния помех основано на банке фильтров и сложных алгоритмах на основе теории нечетких множеств [5]. Предлагаемый алгоритм при условии наличия участка сигнала свободного от помехи позволяет вести прогнозирование сигнала ФПГ на время присутствия помехи в сигнале. Данный способ не позволяет оценить изменения в физиологических процессах, которые возникают при ходьбе. Но в то же время он исключает сбои в регистрации информационных параметров сигнала ФПГ, в случае, если контролируемый сотрудник совершает ходьбу.

Литература

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2002. – 608 с.
2. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. – 272 с
3. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1960. – 883 с.
4. Баевский Р.М. Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. – М.: Наука, 1984. – 221 с.
5. Juwon Lee, Sungin Kang. Heartbeat detection based on filter banks and fuzzy inference for u-healthcare // IEICE Electronics Express, Vol. 6, No. 13, 2009. – P. 936-942.